UNIVERSITE CADI AYAD
FACULTE DES SCIENCES SEMLALIA
DÉPARTEMENT DE PHYSIQUE
MARRAKECH

ANNEE UNIVERSITAIRE 2013/2014

SMP / S4

MÉCANIQUE QUANTIQUE
Exercices complémentaires de la Série 3

I/ Opérateurs - Adjoint d'une expression

A/ Soient A, B et C des opérateurs linéaires.

1) Montrer que :

- $[A,BC] = [A,B]C + B[A,C]$
- $[A,[B,C]] + [B,[C,A]] + [C,[A,B]] = 0$ Identité de Jacobi
- $[A,B]^+ = [B^+, A^+]$; que peut-on dire si A et B sont hermitiques ?

2) Etablir la relation : $\left[A, B^n\right] = \sum_{s=0}^{n-1} B^s \left[A,B\right] B^{n-s-1}$ avec n entier ≥ 1

et en déduire que $[R_\alpha, P_\alpha^n] = i\hbar n P_{\boldsymbol{\alpha}}^{\mathbf{n-1}}$ et $[P_\alpha, R_{\boldsymbol{\alpha}}^{\mathbf{n}}] = -i\hbar n R_{\boldsymbol{\alpha}}^{\mathbf{n-1}}$ (α=x,y,z).

3) Calculer $[R_\alpha, F(P_\alpha)]$ et $[P_\alpha, G(R_\alpha)]$ où F et G sont des fonctions d'opérateurs P_α et R_α respectivement.

Application : Calculer $[R_\alpha, S_\alpha(\lambda)]$ avec $S_\alpha(\lambda) = \exp(i\lambda P_\alpha/\hbar)$.

B/ Soient A et B opérateurs, $|\Psi\rangle$, $|\varphi\rangle$ et $|\Phi\rangle$ des kets de l'espace des états, a et b sont des nombres complexes. Donner l'adjoint des expressions suivantes :

$a\langle\Phi|A|\Psi\rangle$; $a|\Psi\rangle\langle\varphi|\Phi\rangle$; $A|\Psi\rangle\langle\phi|\varphi\rangle$; $|a\varphi\rangle\langle\Phi|B|\Psi\rangle\langle\Phi|$; $|b\Phi\rangle\langle\varphi|A|\Psi\rangle\langle\Phi|B^+$;

$|a\varphi\rangle\langle\Phi|AB|\Psi\rangle\langle\Phi|$; $ia\langle\Phi|\mathbf{A}|\Psi\rangle\langle b\varphi|\Phi\rangle$; $|ia\Psi\rangle e^{iaB}|\varphi\rangle$

II/ Diagonalisation – Dégénérescence

Soit A un opérateur représenté dans la base $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle, |u_3\rangle\}$ par la matrice :

$$A = a\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$ où a est réel non nul

1) A est-il hermitique ? Déterminer ses valeurs propres et vecteurs propres.
2) A est-elle une observable ?
3) Ecrire la matrice de A et celle de F(A) dans la base propre de A. Faire application pour e^A et $\sqrt{A}$.

III/ E.C.O.C.

On considère un système physique dont l'espace des états ξ est de dimension 3 et soit $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$ une base orthonormée de ξ. Les kets de cette base sont des vecteurs propres de deux opérateurs A et B (indépendants du temps) :

$A|1\rangle = a|1\rangle$ $\quad$ $B|1\rangle = b|1\rangle$

$A|2\rangle = a|2\rangle$ $\quad$ $B|2\rangle = -b|2\rangle$

$A|3\rangle = 0$ $\quad$ $B|3\rangle = -b|3\rangle$

où a et b sont des constantes réelles non nulles.

L'opérateur hamiltonien H du système (aussi indépendant du temps) est tel que :

$H|1\rangle = E|1\rangle + E\sqrt{3}|2\rangle$; $H|2\rangle = E\sqrt{3}|1\rangle - E|2\rangle$; $H|3\rangle = E|3\rangle$

1) A et B sont-ils des observables ?

2) Les ensembles {A}, {B}, {A,B} sont-ils des E.C.O.C. dans ξ?

3) Ecrire la matrice représentant H dans la base {| i >}, i=1,2,3. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de H.

4) Vérifier que H commutent avec A et donner une base formée de vecteurs propres communs à H et A. Les ensembles {H} et {A, H} forment-ils des E.C.O.C. dans ξ ?

IV/ Eléments de matrice

Soit H l'opérateur hamiltonien d'un système physique. On désigne par $|\varphi_n\rangle$ les vecteurs propres de H, de valeurs propres E_n : $H\,|\varphi_n\rangle = E_n\,|\varphi_n\rangle$

1) A étant un opérateur quelconque, démontrer la relation : $\langle\phi_n|\,[A,H]\,|\phi_n\rangle = 0$

2) On considère un problème à une dimension, où le système physique est une particule de masse m, et d'énergie potentielle V(X) ; dans ce cas, H s'écrit : $H = \frac{1}{2m}P_x^2 + V(X)$

a) Calculer en fonction de P_x, X, V(X) les commutateurs : $[H,P_x]$, $[H,X]$ et $[H,X\,P_x]$.

b) Montrer que l'élément de matrice $\langle\varphi_n|P_x|\varphi_n\rangle=0$.

c) Etablir une relation entre les deux éléments de matrice : $\langle\varphi_n|\frac{P_x^2}{2m}|\varphi_n\rangle$ et $\langle\varphi_n|X\frac{dV}{dX}|\varphi_n\rangle$.

d) On considère que $V(X) = V_0X^k$ (k=2,4,6… ; $V_0 > 0$), Trouver la relation entre :

$<T> = \langle\varphi_n|\frac{P_x^2}{2m}|\varphi_n\rangle$ et $<V> = \langle\varphi_n|V(X)|\varphi_n\rangle$.

V. Particule dans un champ électrique (Extrait du Contrôle 2013)

On considère un problème à trois dimensions où le système est une particule de masse m et de charge q plongée dans un champ électrique statique uniforme $\vec{\varepsilon}$ parallèle à l'axe Oz d'un repère cartésien Oxyz. Soit H une observable associée au système et qui s'écrit :

$$H = \frac{\vec{P}^2}{2m} - q\varepsilon Z$$

où $\vec{P}$ est l'observable impulsion et Z est l'observable position suivant l'axe Oz.

1) Calculer les commutateurs : $[P_x, H]$, $[P_y, H]$ et $[P_z, H]$.

2) On désigne par $|\Phi>$ un vecteur propre de H associé à la valeur propre E supposée <u>non dégénérée</u> ; soit : $H\,|\Phi> = E\,|\Phi>$.

a) Montrer que $|\Phi>$ est aussi vecteur propre de P_x associé à une valeur propre que l'on notera α. Même question pour P_y avec β comme valeur propre.

b) Ecrire en représentation position l'équation aux valeurs propres de P_x et celle de P_y et montrer que l'on a :

$$\langle\vec{r}|\Phi\rangle = \exp(\frac{i\alpha x}{\hbar}).\exp(\frac{i\beta.y}{\hbar}).\varphi(z)$$ où φ est une fonction de z.

c) En utilisant la même représentation pour l'équation aux valeurs propres de H, montrer que l'équation différentielle vérifiée par $\varphi(z)$ se met sous la forme :

$$\frac{d^2\varphi(z)}{dz^2} + k\,z\,\varphi(z) = -\frac{\lambda^2}{\hbar^2}\varphi(z) \quad \text{avec} \quad k = \frac{2mq\varepsilon}{\hbar^2} \quad \text{et} \quad \alpha^2 + \beta^2 + \lambda^2 = 2mE$$

<u>Rappel</u> : $\langle\vec{r}|\Phi\rangle = \Phi(\vec{r})$; $\langle\vec{r}|Z|\Phi\rangle = z\Phi(\vec{r})$ et $\langle\vec{r}|P_\mu|\Phi\rangle = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial\mu}\Phi(\vec{r})$ avec μ = x,y,z